심박출량 측정법의 한계

서울대학교병원 의료기기 임상평가실 및 서울대학교 의학연구원 의용생체공학연구소

안 원 식

<이 글은 대한마취과학회지 2008년 3월호 종설 '심박출량 측정법의 문제점 및 장단점'의 많은 부분을 편집위원회 허락을 얻어 재인용 하였음을 밝힙니다.>

심장에서 배출되는 혈액의 양을 측정하는 것은 마취나 중환자 진료에서 매우 중요한 항목이다. 그러므로, 환자의 상태가 중증이 될수록 심박출량 측정 빈도가 많아진다. 하지만, 심박출량 측정기가 채용한 측정 원리가 다양하므로 측정에서 발생할 수 있는 오차를 완전히 이해하기에는 여러 방면의 지식이 필요하다. 또한, 임상에서 진료의 판단 기준으로 사용되는 심박출량의 절대값이 얼마가 될 때 유의하게 증가되었다고 판단을 할 것이며, 얼마가 될 때 감소하였다고 판단할지는 아직 명확하게 알려져 있지 않다. 마찬가지로, 얼마의 심박출량 증가나 감소가 임상적으로 유의한지도 많은 토의가 필요하겠다. 이러한 토의를 위해서는 기본적인 심박출량 측정 방법과 임상적 적용, 합병증에 대한 것을 알아야 하는데, 임상적인 것은 이상민의[1] 종설을 참고하면 도움이 될 것으로 생각된다. 이 글에서는 앞 선 종설을 읽었다는 가정하에 이론적인 관점에서 심박출량 측정법의 원리를 점검하여 심박출량의 한계를 인지하고 임상적으로 활용할 때 적절한 절대값의 해석과 추세의 해석에 도움을 주고자 작성하였다.

심박출량 측정법을 원리에 기반을 두고, 크게 나누어보면, 폐동맥 카테터를 이용한 방법과 초음파를 이용한 방법(심장초음파, 대동맥 초음파), 이산화탄소 재호흡법, 혈압파형분석법, 전신 희석법(리튬, 색소), 전기저항 측정법 등이 있다. 이 들 각 항목을 약간 심층적으로 들어가서 분석하여 임상가들이 이해하고 있는 것과 어떤 차이가 있는지 알아보기 위해 각 측정법별로 고려할 사항을 표로 정리하여 보았다(Table 1).

폐동맥 카테터를 이용한 방법

폐동맥 카테터를 이용한 방법을 이해하기 위해서는 Fick의 원리에 대해 이해하여야 하기에 정의를 다시 기재하면 아래와 같다.

"주어진 시간 동안에 개체(compartment)에 들어가는 물질의 양(A)은 개체에 축적되는 양(B)과 개체에서 빠져 나오는 양(C)의 합과 같다."[2]

즉, A = B + C 라는 직관적으로 이해될 수 있는 원리를 이용한다. 그러나, 물질의 양을 직접 측정하지 못하기에 여러 가지 방법을 사용하고 있다. 심박출량 측정에서는 혈액내 산소와 이산화탄소 농도, 온도의 변화, 색소의 농도 등을 이용하여 이를 운반하는 혈액의 양을 간접적으로 추정하게 된다. 초창기에는 산소소모량과 동정맥혈의 산소 함량 변화를 이용하여 심박출량을 추정하였으나 최근에는 잘 사용되지 않으므로, 현재 임상적으로나 의공학적으로 표준으로 인정받고 있는 열희석법에 대해 먼저 생각해보자.

열희석법은 다음과 같은 Stewart-Hamilton 방정식을 이용하는데, 각 항목을 어떻게 반영하게 되는지 알아보자

$$Q = V(T_b - T_I)\ K_1K_2 \ /\ T_b(t)dt$$ [3]

Q: 심박출량, V: 주사액 용량, T_b: 혈액 온도, T_I: 주사액 온도, K_1:밀도 상수, K_2:계산상수

열희석법은 혈액과 주사액의 온도 측정이 생명이다. 그런데, 이 온도 측정 소자는 우리가 간과하기 쉬운 몇 가지 문제가 있다. 첫째로, 온도에 대한 반응 속도이다. 임상적으로 많이 사용하는 NTC(negative thermal control) 계열의 온도 측정 소자들은 반응 속도가 약간 느리다. 환자 감시 모니터에서 사용하는 체온측정기를 환자의 특정부위에 부착한 후 온도 변화 시간을 생각해 보면 짐작할 수 있을 것이다. 더욱이, 이러한 온도 변화를 빨리 감지하기 위해서는 반응 속도를 결정 짓는 시간정수(time constant)를 짧게 하여야 하고, 열용량(thermal capacity)을 적게 하여야 한다. 하지만 이러한 방향으로 만들기 위해서는 열 감지 소자의 크기를 작게 해야 하는데, 작게 하면 할수록 안정도에 문제가 생긴다. 즉, 대량 생산에서 정확성을 보장하지 못하게 되고 오차 범위가 커지게 된다. 공학적으로 큰 문제가 되지 않는 오차의 크기라도 소수 첫째 자리의 정확성을 이용하는 임상적 측정에서는 오차가 상당한 의미를 지닐 수 있다. 또

Table 1. Considering Points in the Principles Adopted in Cardiac Output Measurement Devices

Generic name	Key principle	Considering points
Pulmonary artery catheter*	Fick's principle	temperature sensor, start point and end point in integration
echocardiography	Doppler's principle	angle of ultrasound beam, turbulent flow
ultrasound to aorta	Doppler's principle	angle of ultrasound beam, pulsatile laminar flow
carbon dioxide rebreathing	Fick's principle	$ETCO_2$, $PaCO_2$ correlation
pressure wave analysis	-	pulsation, convolution
systemic dilution	Fick's principle	start point and end point in integration, recirculation
measurement of electric resistance	Ohm's law	skin incision (reduction of resistance)

*Thermodilution by a pulmonary artery catheter is considered as a standard method to measure cardiac output. If a new measurement device for cardiac output is developed, it is compared with thermodilution technique using a statistical method, usually correlation. Current correlation technique does not infer how much is the effect size of the correlation, but only whether there is correlation or not.

한, 온도 측정 소자를 둘러싸고 있는 코팅과 여기에 덧 붙을 수 있는 혈전, 측정 소자가 폐동맥내 중앙에 위치하지 않게 되는 경우에는 더욱 문제가 커지게 된다. 주사액 투여가 아닌 혈액 가온에 의한 지속적 심박출량 측정법도 같은 방식의 온도 측정 소자를 사용하기에 급격한 심박출량 변화가 있을 경우에는 이를 반영하지 못하고 있다.[4)]

둘째로, Tb(t)dt에서 사용하는 시각의 정의 문제이다. Tb(t)dt는 시간에 따른 측정 온도의 변화를 나타내는 곡선으로 이의 적분값이 심박출량에 반비례하는 것으로 되어 있다.[3)] 하지만 이 기간 즉, 온도 저하의 시작과 끝 점을 정의하는 것이 알고리즘의 가장 큰 문제이다. 보통 모니터에서 심박출량 측정 시작 전에 버튼을 눌러 측정 알고리즘에게 시작 점을 알려 주긴 한다. 하지만 실제로 얼마의 온도차이가 나기 시작하면 적분을 시작할 것이며 얼마나 원상회복을 하면 적분을 멈출 것인가를 정의하는 것이 문제이다. 또한, 일정시간 이상이 지나가면, 재관류에 의해 곡선이 중첩되므로 가능한 한 빠른 시간에 투여하기를 권장하고 있는 이유가 여기에 있다(Fig. 1). 그러므로 시작 시각과 끝남 시각의 알고리즘적 정의가 환자감시장치로서 심박출량 측정의 질적 차이를 유발하는 초점이 되지만, 상업적 이유로 자세한 알고리즘은 대부분의 회사에서 공개하지 않고 있다.

그 밖에 주사액의 온도 및 용량, 시간, 호흡 주기, 상수 입력 오류, 낮은 심박출량, 삼첨판 이상 등은 다른 임상적 논문이나 책에서 설명되어 있다.[1,5)]

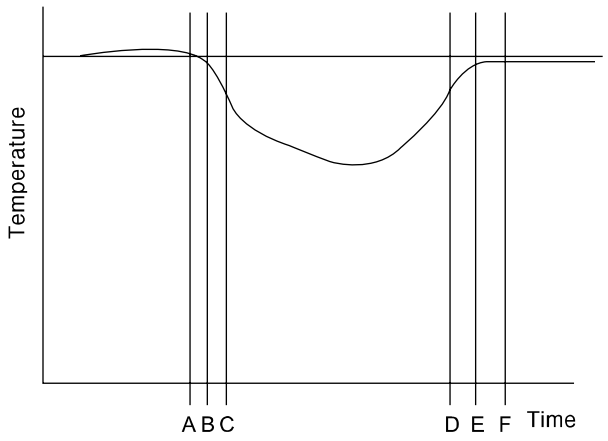

Fig. 1. Temperature curve during cardiac output measurement. Cardiac output is estimated by the inverse correlation of the integration of the temperature. However, it is very difficult to select the starting point of the integration, A, B, or C. The end point of the integration, D, E, or F is also difficult to select. These are the main know-how of algorithm to develop a cardiac output measurement device and the main source of error.

초음파를 이용한 방법(심장초음파, 대동맥 초음파)

초음파를 이용하는 심장 초음파 장치나 대동맥 초음파 장치를 이해하기 위해서는 초음파를 이용하여 측정하는 변수가 반사되는 초음파의 파장 변화라는 것을 알아야 한다. 이 파장 변화는 도플러의 법칙에 의해 움직이는 물체의 속도를 추정할 수 있는 기초가 된다. 그래서 여러 글에서 다음 식을 기술한다.

$$\text{심박출량} = \text{속도시간적분(velocity time integral)} \times \text{단면적} \times \cos\theta \times \text{심박동수}$$

이 때 초음파 빔과 혈류 방향의 평행성 정도가 문제된다. 이 중에서 초음파 빔과 혈류의 방향이 이루는 각도가 0일 경우에는 $\cos\theta$가 1이 되어 비교적 적절하게 추정 되지만 각도가 0이 아닌 값인 경우에는 오차를 수반하게 된다. 문제는 이러한 각도를 임상적으로 알 수 없기에 부정확한 심박출량 추정값이 나오게 된다는 것이다.

지금부터는 임상서적에는 잘 나오지 않는 근본적인 문제에 대해 같이 살펴 보겠다. 먼저, 상기 식에서 사용하는 중

요한 가정은 혈류의 속도를 반사되는 초음파 파장 측정에 의해 구할 수 있다는 것이다. 또한, 혈류속도를 알면 혈류량(심박출량)을 추정할 수 있다는 것이 근본적인 가정이다. 그러면 혈류속도와 혈류량이 실제 어떤 관계에 있는지 몇 가지 가정을 정하고 하나씩 알아보자. 혈류와 혈액의 속도에 대한 가정을 이해하면서 이 가정이 얼마나 신체 혈류를 잘 반영하는지 생각하면서 글을 읽었으면 좋겠다.

먼저, 혈액의 흐름인 혈류를 이해하기 위해서는 continuous laminar flow, pulsatile laminar flow, non-laminar liquid flow, turbulent flow, steady state, non-steady state 등 용어 정의가 필요하겠다. steady state는 유체가 어떤 관을 흐르고 있을 때 관의 양쪽 끝 지점의 압력차로 발생되는 힘이 관과 유체의 마찰에 의해 상쇄되는 경우를 말한다. 즉, 관찰하고자 하는 측정 변수가 시간에 따라 변화하지 않는 상태를 의미한다. 반면에 non-steady state는 유체가 어떤 관을 흐르고 있을 때 관의 양쪽 끝 지점의 압력차로 발생되는 힘이 내부적인 마찰력을 이기고, 시간에 따른 상태 변화, 예를 들어 가속도를 유발하는 상태, 즉 속도의 변화가 있는 상태를 말한다.

Continuous laminar flow라고 하는 상태는 steady state의 일종으로 유체가 속도 변화 없이 중앙부위가 빨리 흐르고, 관 표면에 갈수록 늦게 흐르며, 벽에 대해 평행하게 흐르는 혈류를 가정한다(Fig. 2). 이 때 추가적인 가정으로 단위 유체 안에서는 마찰이 없고(즉, 내부적으로 고체라는 의미), 관은 탄성이 없고, 길이가 한정되어 있다고 가정한다. 또한, 내부 물질은 조성이 같고, 점성은 모든 방향의 shear에 있어서 같고, 관의 벽에서 미끄러지는 현상이 없으며, 관은 원형인

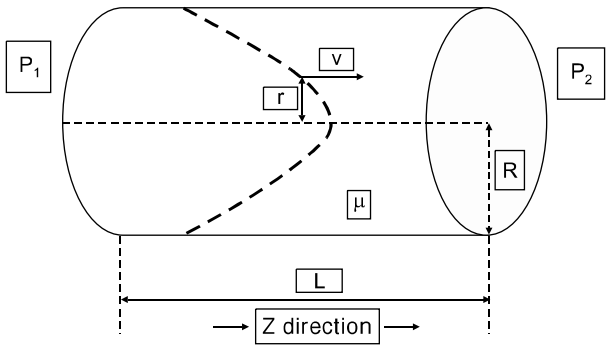

Fig. 2. Schematic drawing of continuous laminar flow. The velocity (v) represents flow rate when it is displaced (r) from the center with density μ in a tube with finite length (L) and radius (R). The assumptions are followed; The liquid is homogeneous and its viscosity is the same at all rates of shear. The liquid does not slip at the wall. The flow is at all points moving parallel to the walls of the tube. The rate of flow is steady and is not subjected to acceleration or deceleration. The tube is cylindrical in shape. The diameter of tube does not vary with the internal pressure.

상태를 가정하고 다음 식을 유도하여 사용한다. 이 식의 유도 과정과 문자에 대한 해설은 부록 1에 다루었으니 참고하기 바란다.[6)]

$$v = \frac{(P_1 - P_2)}{4\mu L}(R^2 - r^2)$$

$$Q = \pi R^4 \frac{(P_1 - P_2)}{8\mu L}$$

이 공식들은 많은 교과서에서 혈류를 설명하기 위해 기술하는 식이지만 혈류 흐름의 현실과 상기 가정을 비교해 보면 큰 차이가 있다는 것을 알 수 있다. 또한, 단위 유체 내부를 액체로 생각하여 마찰이 있는 것을 가정하면, 속도 방정식은 다음과 같이 된다(부록 1).

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{(P_1 - P_2)}{\mu L} = 0$$

Pulsatile laminar flow라고 하는 상태는 실제 혈류와 비슷하게 박동을 하고 있는 상태이므로 관의 양 끝에 걸리는 압력이 시간에 따라 변화하여, 중앙부위와 주변 부위 속도가 시간, 위상 등 여러 변수에 의해 달라질 수 있는 상태를 말한다. 하지만, 다른 대부분의 continuous laminar flow에서 사용하는 가정들은 그대로 적용된다. 이러한 가정을 가지고 각 지점에서 속도와 혈류에 대한 방정식을 구하면 다음과 같다. 유도과정은 부록 2에 다루었다.[7)]

$$v = \frac{A^* R^2}{i\mu\alpha^2}\{1 - \frac{J_0(\alpha y i^{3/2})}{J_0(\alpha i^{3/2})}\}e^{i\omega t}$$

$$Q = \frac{\pi A^* R^2}{i\omega\rho}\left(1 - \frac{2J_1(\alpha i^{3/2})}{\alpha i^{3/2} J_0(\alpha i^{3/2})}\right)e^{i\omega t}$$

Pulsatile laminar flow의 속도와 혈류량은 혈액이 박동하는 상태를 가정하여 계산한 공식이므로 현실을 반영하는 단계가 한 단계 증가하였다. 하지만, 많은 가정이 현실과 다르고, 각 위상에 따른 순간 속도와 혈류량을 알기 위해서는 고등 수학이 필요한 실정이다. 그래도, pulsatile laminr flow model은 turbulent flow에 비해 수학적 방정식으로 혈류 속도와 혈류량을 추정할 수 있다는 장점이 있다.

Nonlaminar liquid flow는 선형방정식으로 표현할 수 없는 소용돌이 모양으로 흐르는 것을 말하는 것으로 turbulent flow라고 표현하기도 한다. Turbulent flow는 Osborne Reynolds가 1883년에 처음 기술한 사항으로 다음과 같은 Reynolds 수를 계산하여 2000이 넘으면 laminar flow가 turbulent flow로 변할 수 있다는 것을 경험적으로 알고 있다.

$$R = \frac{VD\rho}{\mu} = 26VD$$

R: Reynolds 수, V: 평균 혈류속도, D: 관의 직경, ρ: 유체밀도, μ: 동적 점성

하지만 유체의 흐름을 잘 조절하면 R이 12000이 될 때까지 laminar flow를 유지할 수 있으므로 2000이라는 숫자가 절대적인 것은 아니다. Reynolds 수가 laminar flow와 turbulent flow를 결정하는데 도움을 주지만, turbulent flow의 속도나 유량 방정식을 구하는데는 도움이 되지 않는다. 일반적으로 비선형인 turbulent flow는 선형 방정식으로 표현할 수 없기에 임상가들이 활용할 수 있는 적절한 속도나 유량 방정식을 구할 수 없다.[6)]

초음파에 의한 심박출량 측정은 위에서 설명한 혈류에 대한 가정에 중요한 문제가 있다. 초음파가 혈류속도를 측정하고, 혈류속도를 알면 혈류량을 측정할 수 있다는 가정이 근간을 이루는데, 이는 continuous laminar flow를 대상으로 하고 있다. 심장 초음파의 측정 대상이 되는 혈류는 turbulent flow에 해당되고, 대동맥 초음파의 측정 대상은 적어도 pulsatile laminar flow이다. 하지만 유도식이 갖는 가정들을 무시하고, 두 측정 대상 모두 continuous laminar flow를 가정하기 때문에 오차가 클 수 밖에 없다. 즉, 초음파의 파장 변화로 인해 혈류의 속도 변화를 추정할 수는 있으나 그 속도와 혈류와의 상관 관계에 있어서 여러 가정이 포함되는데, 이러한 가정 중 임상 현실과 동떨어진 비현실적인 것이 많이 포함되어 있다는 것을 이해하여야 한다.

심장초음파에 의한 심박출량 측정에서 초음파 빔과 혈류 방향의 평행성 정도, 혈관 지름 측정 정확도 등과 함께 위와 같은 혈류 속도와 혈류량에 대한 가정의 비현실성을 고려해야한다. 한편, 대동맥 초음파를 이용하는 경우에도 pulsatile laminar flow와 continuous laminar flow의 차이를 고려하여야 하며, 환자의 움직임이 있는 경우 초음파 probe가 약간 변동하여도 측정오차가 발생할 수 있는 것을 인식하여야 할 것이다. 더불어 서양인에서 측정되어 나이, 몸무게, 키를 기반으로 한 추정 공식을 동양인인 우리들에게 바로 적용할 수 있는가에 대한 비교임상연구도 필요할 것으로 생각된다.

이산화탄소 재호흡법[8)]

Noninvasive cardiac ouput이라는 상품명을 갖는 이산화탄소 재호흡에 의한 장비는, 사강이 일정하여 호기말 이산화탄소 농도가 동맥혈 이산화탄소 농도를 잘 반영한다는 가정하에서 출발하였다. 하지만 수술실이나 중환자실의 환자에서 두 이산화탄소 농도 차가 변화하는 경우에는 필연적으로 오차를 수반한다. 이를 이 장치에서 사용하는 수학적 공식으로 확인하면 다음과 같다.

먼저, Fick의 원리를 이산화탄소 배출에서 적용해 보자. Fick의 원리에 의해 체내에서 생산되어 폐에서 배출되는 이산화탄소의 양은 심박출량과 동정맥 이산화탄소 농도차이의 곱과 같을 것이므로 이를 수식으로 표현하면,

$$\text{심박출량} = \frac{\text{물질을 흡수하거나 배출하는 농도}}{\text{동정맥 물질 농도 차이}}$$

이를 각 성분별 속도와 농도로 표시하면,

$$\frac{\text{폐로부터 이산화탄소가 제거되는 속도(V)}}{\text{정맥혈 이산화탄소 농도}(v) - \text{동맥혈 이산화탄소 농도}(a)}$$

그러므로 정상 호흡 상태(v_n, a_n)와 재호흡 상태(v_r, a_r) 일 때 심박출량은 각각 다음과 같이 표시될 수 있다. 정상 호흡 상태일 때 심박출량은

$$\text{심박출량} = \frac{V_n}{v_n - a_n}$$

이산화탄소를 제거하지 않고 다시 호흡에 투여하는 재호흡 특수 장치를 작동시키는 재호흡 상태에서의 심박출량은

$$\text{심박출량} = \frac{V_r}{v_r - a_r}$$

과 같은 공식으로 구해진다. 두 공식을 각각 재 배치하면,

$$v_n - a_n = \frac{V_n}{\text{심박출량}} \qquad v_r - a_r = \frac{V_r}{\text{심박출량}}$$

$$v_n = a_n + \frac{V_n}{\text{심박출량}} \qquad v_r = a_r + \frac{V_r}{\text{심박출량}}$$

생산되는 이산화탄소량이 급격히 변화하지 않는 가정하에서 v_n과 v_r는 같을 것이므로 두 우변이 같다. 즉,

$$a_n + \frac{V_n}{\text{심박출량}} = a_r + \frac{V_r}{\text{심박출량}}$$

이 때, 좌우변을 다시 정리하면,

$$a_n \times \text{심박출량} - a_r \times \text{심박출량} = V_r - V_n$$

약 1분 이내의 기간 동안에 심박출량이 급격히 변화하지

않는다고 가정하면 두 심박출량이 같다고 볼 수 있다. 그래서, 심박출량으로 묶고, 좌변을 심박출량으로 만들면,

$$\text{심박출량} = \frac{V_r - V_n}{a_n - a_r}$$

이 상황에서 폐로부터 이산화탄소가 배출되는 양(V_r, V_n)은 호기에 포함되는 이산화탄소의 농도와 호기 가스량으로 계산할 수 있다. 그런데, 정상 호흡과 재 호흡 상태에서 동맥혈의 이산화탄소 농도를 직접 측정하지 않고, 호기말 이산환탄소($ETCO_2$) 농도로 추정하게 된다. 만약 동맥혈 이산화탄소 농도와 호기말 이산화탄소 농도가 일정한 차이를 보인다면 오차가 크지 않겠지만 무기폐 등이 증가하여 V/Q mismatch가 늘어나면 동맥혈 이산화탄소 농도와 호기말 이산화탄소 농도의 차이가 증가하게 되어 상기 식의 분모항에서 큰 오차를 유발하게 된다. 대다수의 임상가들은 중환자실 환자나 장시간 수술한 환자에서 이 농도의 차이가 크게 나오는 것을 임상적으로 경험한 때가 많이 있을 것이고, 이러한 상황이 생길 수 있는 환경에서 NICO 값을 해석할 때는 적절한 주의가 필요하겠다.

혈압파형분석법

혈압 파형 분석에 기반한 vigileo에서 사용하는 기본 알고리즘에는 동맥 압력 파형(arterial pressure wave)이 일회심박출량(stroke volume)을 반영한다는 가정이 필요하다. 이 장비에 대해 최근 연구에서 좋은 심박출량 추정을 기술한 연구도 있다.[9,10] 하지만 이에 대한 반론을 제기하는 연구도 있다.[11] 또한, 상하지 혈압이 역전될 수 있음을 지적한 연구도 있어 한 곳의 혈압 측정이 심박출량을 바르게 대표하지 못할 수도 있다.[12] 하지만 보다 근본적으로 혈압 파형 분석에 기반한 장비를 정확히 이해하기 위해서는 혈류(심박출량)와 혈관저항, 혈압에 대한 이해가 필요하다.

만약 혈관의 직경이 일정하여 혈관 저항 성분이 변화하지 않는다면 혈류와 혈압이 비례 관계에 있게 된다. 이러한 특성을 이용하여 혈압을 기준으로 혈류를 추정하는 것은 임상 진료에서 많이 사용되고 있고, 혈압파형분석법에 의한 추정의 근간을 이루고 있다. 하지만, 실제 인체는 시간과 부위에 따라 혈관 저항을 변화시키기 때문에 근본적 가정에 대해 재고하는 것이 필요하다. 즉, 혈압 파형이 일정함에도 불구하고, 혈관 저항의 변화로 인해 혈류(심박출량)가 변화할 수 있기 때문이다. 또한, 심박출량을 추정하는 알고리즘을 이해하는데 필요한 중요한 개념으로 'convolution'이라는 것이 있다. Convolution의 개념을 이해하기 위해서 고객 예탁금과 은행 잔고에 대한 예를 생각해 보겠다. 은행

		달수	0	1	2	3
		이자(%)	5	5	5	5
고객예탁원금(만원)			3	2	1	2
무이자	1.05^3	1.05^2	1.05	1		
첫 달 이자	1.05^3	1.05^2	1.05	1		
둘째 달 이자	1.05^3	1.05^2	1.05	1		
셋째 달 이자	1.05^3	1.05^2	1.05	1		
전달 이월 잔고(만원)			0	3.15	5.41	6.73
총 예금 잔고(만원)			3	5.15	6.41	8.73

Fig. 3. The relation of deposit, rate, and balance. If rate is changed, the deposit and the balance are also changed simultaneously and the number of arithmetic addition and multiplication are dramatically increased. The convolution is developed for this situation to calculate easily. If we study Fourier transform, one of Laplace transform, we could calculate these with simple multiplication.[13,14]

잔고 계산에서, 한 번 입금된 원금에 대해 일정기간의 이자가 반복적으로 계산되는 과정을 살펴보면 convolution의 개념을 이해할 수 있을 것으로 생각되니, 시간에 따른 이자율 변화와 시간에 따른 고객예탁금을 기반으로 은행잔고를 계산하는 과정을 살펴보자(Fig. 3). 이를 수식으로 간략히 표현하면 다음과 같다.

은행잔고 = 이자율 inv⊗ 고객예탁금

inv⊗: convolution 기호

그런데, 만약 고객예탁금과 이자율을 모르는 상태 또는 이자율만 추정할 수 있는 상태에서 은행잔고가 많아지거나 줄어드는 현상을 보고, 고객예탁금을 추정하고자 한다면 앞 식의 역함수 연산인 다음 식으로 계산하여야 한다.

고객예탁금 = 은행잔고 ⊗ 이자율

⊗: convolution의 역 연산 기호

이제, 이러한 배경 지식을 가지고, 혈류(심박출량), 혈압, 전신혈관 저항을 대입해 보자. 위의 예에서 은행에 돈을 예치하거나 찾는 행위는 혈류(심박출량)에 대비되고, 혈압은 은행잔고, 이자율은 전신 혈관 저항에 대비된다. 이를 수식으로 표현하면,

혈압(은행잔고) = 혈관저항(이자율) ⊗
혈류(심박출량, 고객예탁금)

직관적인 해설로 부언한다면, 혈류가 증가하면, 혈압이 증가하고, 혈관저항이 증가하면 혈압이 증가한다. 하지만, 이러한 관계가 혈관저항과 혈류가 시간에 따른 변수이기

때문에 convolution의 연산을 통해 이루어지게 된다. 혈압이 시간에 따라 변화하는 물리량이라는 것은 매일 혈압 파형을 관찰하는 마취과 의사에게 다시 설명할 필요는 없을 것이다. 하지만, 평균 혈압이나 수축기 혈압으로 혈압을 대표하는 임상적 관례를 고려하면, 다시 한 번 혈압도 시간에 따라 변화하는 물리량임을 강조하고 싶다. 또한, 혈관저항도 자율신경계의 조정과 혈관내 호르몬에 의해 시간에 따라 계속 변화하고 있다. 혈압과 혈관저항도 은행 잔고와 이자율과 마찬가지로 시간에 따라 변화하는 물리량이므로, 혈압을 계산해 내기 위해서는 convolution을 사용해야 한다.

그럼, 우리의 목표인 혈압 파형에 의한 혈류(심박출량) 추정은 어떻게 수행해야 하는가? 앞의 예인 고개예탁금 추정 과정을 이용하여 각각을 대비해 보자. 그러면, 아래와 같이 inverse convolution 연산을 이용한 계산이 필요하다.

혈류(심박출량, 고객예탁금) = 혈압(은행잔고) inv⊗
혈관저항(이자율)

이 때, convolution이나 inverse convolution 연산이 시간에 따른 변수가 아닌 상수에 대해 수행되면 곱하기와 나누기로 된다. 그러므로, 만약 혈류, 혈압, 혈관저항을 모두 상수라고 생각한다면 임상 교과서에서 흔히 보게 되는 다음 식이 나오게 되는 것이다.

심박출량 = 평균혈압/전신혈관저항

앞서 설명한 바와 같이 혈류, 혈압, 혈관저항이 모두 시간에 따라 pulse 형태로 변화하는 물리량임에도 불구하고, 현재 임상적으로 많이 사용하는 공식은 이들을 각각 평균하여 상수화한 후 계산하여 사용하고 있다. 그리하여, inverse convolution도 나누기로 치환하여 사용하기에 일반적으로 평균혈압을 전신혈관저항으로 나누는 것에 큰 거부감이 없이 받아들이게 되었다. 하지만 파동 형태를 직선으로 근사한 평균혈압과 전신혈관 저항으로는 적절한 심박출량 산출을 기대하기 어렵다. 이와 같이 파동 형태의 혈압과 전신혈관저항을 단순히 상수로 만드는 과정에서 많은 정보가 누락된다. 차원 감소를 시행하면 유용한 정보가 소실되므로, 보다 양질의 임상 정보를 위해서는 원래 파형을 해석하는 분석법을 개발하여 진료에 활용하는 방안을 찾아보는 것이 좋을 것이다.[15)]

상기와 같이 혈압 파형을 분석하지 않고, 상수 값을 사용하면서 많은 정보가 누락되므로, 혈압 파형의 상승속도 등을 분석하여 추가적인 정보를 가지고 심박출량을 보다 정확히 추정하도록 고안한 장치가 Vigileo인 것이다. Vigileo가 사용하는 내부 알고리즘을 완전 공개하고 있진 않으나 전신혈관저항을 지속적으로 측정할 수 없고, 심박출량을 시간의 함수가 아닌 상수로 표시하기에 이론적으로 정확한 심박출량이 나올 수는 없다. 이러한 사항을 감안하여 표시되는 수치를 해석해야 할 것이다.

참고로, convolution, inverse convolution의 개념과 실제 계산은 Laplace transform의 일종인 Fourier transform을 이해하고, 이를 이용하면 간단한 곱셈으로 구할 수 있다.[13,14)]

전신 희석법(dilution method, lithium, dye), 전기저항 측정법(impedance cardiogram)

Lithium이나 dye를 사용하여 심박출량을 측정하는 방법은 폐동맥 카테터에서 온도 저하를 측정하는 것처럼 언제 시작하고 언제 끝내는가 하는 것이 큰 노하우로 작용한다. 특히, 이때는 재순환에 대한 처리 알고리즘이 얼마나 잘 갖추어져 있는가 하는 것도 고려해야 할 점이다. 전기저항 측정법은 전기간섭에 영향을 받기 쉬워 전기 소작기를 사용하는 수술장 환경에선 사용이 용이하지 않고, 심전도 전극의 부착 상태가 변화할 수 있고 피부절개가 많은 중환자실 환자에게도 적용하기 쉽지 않다. 또한, 질병 상태(폐부종, 대동맥 질환, 심장 수술)에선 부정확할 수 있으므로 임상적으로 활용할 때에는 이를 고려하여야 하겠다.[1)]

이들 측정 원리에 대해서는 이론적 반론보다는 검증 때 사용하는 방법론에 대해 살펴보겠다. 새로운 방법이 나왔을 때 소위 표준이라고 생각하는 폐동맥 카테터에 의한 측정법과 비교하게 된다. 폐동맥 카테터에 의한 측정법도 상기

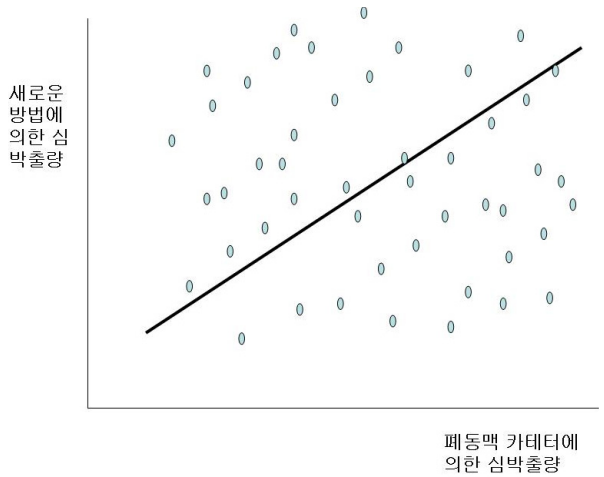

Fig. 4. Scatter plot of cardiac output measurements by pulmonary artery catheter and a new method. Though real data sometimes show spherical distribution and correlation coefficient is low, the hypothesis of H_0: $\rho=0$ could be rejected if there are a lot of samples. A new statistical method is needed for evaluation of a new cardiac output measurement method based on the correlation coefficient.

와 같은 문제점이 있을 수 있으나 일단 적절하게 측정되었다고 가정하자. 새로운 측정법과 폐동맥 카테터에 의한 측정법을 비교하는 방법에서 가장 많이 사용하고, 타당하다고 생각되는 것은 두 가지 측정을 동시에 시행하여 둘 간에 차이가 어느 정도인가 알아보는 것이다. 이러한 비교 측정을 여러 번 시행한 후 일목 요연하게 기술하는 통계적 기법이 상관 관계 분석이다.[16] 하지만, 이러한 분석 방법은 둘 간에 상관 관계 유무를 주요 분석 목표로 삼고 있고, 상관성 정도에 대해서는 보조적인 방법으로 기술하고 있다. 이 방법의 문제점은 표본 수를 계속 늘리면 두 가지 방법간에 상관성이 나타날 가능성이 높아지고, 비록 두 측정법에 의해 관찰된 결과가 상관성이 적더라도 표본 수를 무한히 크게 하면 상관관계가 있는 것으로 결과가 나타난다(Fig. 4). 그래서, 상관관계 분석에서 주 분석 목표를 상관 관계 유무보다는 상관성 정도(effect size)로 하자는 주장이 있다.[17-19] 이러한 주장은 1990년대에 제기되기 시작했지만 아직도 의학논문은 물론이고, 생물통계(biostatistics)를 전공하는 학자들에게도 일반화되어 있지 않다. 그래서, 많은 논문에서 Fig. 4와 같은 상관성 분석 도표를 보여주면서 두 방법간에 유의한 상관관계가 있으므로 새로운 심박출량 측정법이 기존에 표준으로 인정된 폐동맥 카테터로 측정된 방법과 차이가 없다는 결론을 도출하게 된다. 실제 결과 도표를 보면 한 시점에 심박출량이 2배 이상 차이가 나는 경우가 많은데도 이를 무시하고, 두 방법의 측정값이 유효하다고 판정하는 것은 개선이 필요하다고 생각된다. 그래서 이러한 방법을 기반으로 검증된 여러 새로운 방법에 대한 신뢰성이 떨어지게 되고, 상기 방법의 절대값을 임상에 활용하기 보다는 변화 추이를 관찰하면서 임상에 적용하는 것이 바람직하겠다.

맺 음 말

심박출량 측정법이 다양한 방법을 사용하여 측정하여도 매우 잘 맞는다는 주장과[20] 서로 차이가 많이 나기에 임상적으로 해석할 때 주의가 필요하다는 주장이 상존하는 상태이다.[21] 이렇게 상반된 주장이 공존하는 이유 중 하나는 측정대상이 다를 가능성이다. 안정적인 혈압 측정 상황에서 여러 혈압 측정법이 별 차이가 없다가 혈압이 올라가거나 낮아지는 특수한 상황에서 측정기기별로 혈압 측정값이 달라지는 것처럼, 심박출량 측정법도 임상적으로 불안정한 혈역학적 상태에서 서로 다른 값을 표시할 가능성이 높다. 하지만, 아직까지 심박출량이 적은 상황, 급격한 심박출량 변화가 있는 특수한 임상상황에 대한 비교임상시험이 부족한 상황이다. 또한, 모든 개발 장비의 상호 비교도 적어 오차를 증폭시키고 있다. 표준이라고 생각되어지는 폐동맥 카테터의 측정을 기준으로 여러 다른 방법을 비교하고 있으나 폐동맥 카테터 측정법 자체가 많은 오차 요인을 가지고 있으므로, 이를 기준으로 다른 것을 비교하면서 유용성을 평가하는 현재의 판단 방법은 더 큰 오차를 필연적으로 수반하게 된다.

결론적으로, 현재 사용하고 있는 여러 심박출량 측정법은 일정 수준의 오차를 포함하고 있고, 이러한 오차가 임상적으로 무시할 수 있는 정도인가 여부는 아직 모르지만, 단순히 수치의 절대값으로 환자의 진료에 임하기 보다는 다른 임상 양상과 함께 해석하는 것이 바람직할 것으로 생각된다. 또한, 심박출량의 경향을 이용하여 환자의 상태를 파악할 때도 어느 정도 차이가 있을 때 증가나 감소를 판정할지에 대한 논의도 필요하겠다.

참 고 문 헌

1. Lee S: Cardiac Output Measurement. Korean J Anesthesiol 2004; 46: 1-9.
2. Cruickshank S: Mathematics and ststistics in anaesthesia. Oxford, Oxford University Press. 1998, pp 16-21.
3. Lake CL, Hines RL, Tlitt CD: Clinical monitoring. Philadelphia, W.B. Saunders company. 2001, pp 206-8.
4. Siegel LC, Hennessy MM, Pearl RG: Delayed time response of the continuous cardiac output pulmonary artery catheter. Anesth Analg 1996; 83: 1173-7.
5. Miller RD: Cardiovascular monitoring. In: Miller's anesthesia. 5th ed. Edited by Miller RD: Philadelphia, Elsevier. 2005, pp 1265-362.
6. Nichols WW, O'Rourke MF: McDonald's blood flow in arteries. Theoretical, experimental and clinical principles. 5th ed. London, Hodder Arnold. 2005, pp 11-48.
7. Nichols WW, O'Rourke MF: McDonald's blood flow in arteries. Theoretical, experimental and clinical principles. 5th ed. London, Hodder Arnold. 2005, pp 137-48.
8. Davis PD, Kenny GN: Basic physics and measurement in anaesthesia. 5th ed. Philadelphia, Elsevier. 2003, pp 34-5.
9. Breukers R, Sepehrkhouy S, Spielenberg SR, Groeneveld ABJ: Cardiac output measured by a new arterial pressure waveform analysis method without calibration compared with thermodilution after cardiac surgery. J Cardiothorac Vasc Anesth 2007; 21: 632-5.
10. Waal EEC, Kalkman CJ, Rex S, Buhre WF: Validation of a new arterial pulse contour-based cardiac output device. Crit Care Med 2007; 35: 1904-9.
11. Headley JM: Arterial pressure-based technologies: a new trend in cardiac output monitoring. Crit Care Nurs Clin North Am 2006; 18: 179-87.
12. Kanazawa M, Fukuyama H, Kinefuchi Y, Takiguchi M, Suzuki T: Relationship between aortic-to-radial arterial pressure gradient after cardiopulmonary bypass and changes in arterial elasticity. Anesthesiology 2003; 99: 48-53.

13. Kreyszig E: Advanced engineering mathematics. 8th ed. New York, John Wiley & Sons, Inc. 1999, pp 574-5.
14. Sundararajan D: The discrete Fourier transform. London, World Scientific Publishing Co. 2001, pp 287-311.
15. Sim JY, Ahn W: Monitoring wave analysis and bioinformation. Korean J Anesthesiol 2007; 52: 620.
16. Cruickshank S: Mathematics and statistics in anaesthesia. Oxford, Oxford University Press. 1998, pp 242-5.
17. Ahn W: Sample size of research project is determined by the study researcher? Korean J Ped Anesth 2003; 7: 68-70.
18. Murphy KR: Statistical power analysis. New Jersey, Lawrence Erlbaum. 1998.
19. Cohen J: The earth is round (p<.05). Am Psychol 1994; 49: 997-1003.
20. Chakravarthy M, Patil T, Jayaprakash K, Kalligudd P, Prabhakumar D, Jawali V: Comparison of simultaneous estimation of cardiac output by four techniques in patients undergoing off-pump coronary artery bypass surgery-a prospective observational study. Annals of cardiac anesthesia 2007; 10: 121-6.
21. Ziegeler S, Grundmann U, Fuerst O, Klos S, Kreuer S: Correlation between Minimally-Invasive Cardiac-Output Monitors. Annual meeting of American society of anesthesiologists: 2006: 10. Chicago.
22. Kreyszig E: Advanced engineering mathematics. 8th ed. New York, John Wiley & Sons, Inc. 1999, pp 218-33.

부 록

부록 1. Continuous laminar flow에서 유체속도 v 상태방정식과 혈류량 공식 유도[6)]

*** Fig. 2에 사용되는 약자의 해설은 다음과 같다.**

μ : 유체 점성
v : 유체 속도
r : 중심에서의 거리
P_1, P_2 : 관의 처음과 끝에 걸리는 압력
L : 관의 길이
Z : 진행 방향
R : 관의 반지름

steady state로 흘러가는 laminar flow에선 유체가 일정한 속도로 흘러가므로 유체의 입장에서 볼 때 외부에서 가해지는 힘은 0이 됨. 관의 양쪽 끝에는 서로 압력이 달라 압력차에 의한 힘이 존재하고, 유체 내부적으로는 마찰에 의한 마찰력이 있어 이 둘이 서로 상쇄되고 있음.

$\therefore F=0$

$=F_{visc}+F_P \cdots$ ①

F_{visc}: 마찰력에 의해 발생하는 힘

F_P: 압력차에 의해 발생하는 힘

Fig. 2에서 원 중심으로부터 r만큼 떨어져 있는 곳의 압력차에 의한 힘은

$$F_P = \pi r^2 (P_1 - P_2) \cdots ②$$

Fig. 2에서 혈관중심으로부터 r 떨어진 곳과 r+dr 떨어진 곳의 점성 F_{visc}는 표면적이 $2\pi rL$ 로 계산되므로

$$F_{visc} = \mu 2\pi rL \frac{dv}{dr} \cdots ③$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{v(r+dr) - v(r)}{dr}$$

①의 식 $F_{visc} + F_P = 0$ 에서

$F_P = -F_{visc}$이고 각각에 ②, ③을 대입하면

$$\pi r^2 (P_1 - P_2) = -\mu 2\pi rL \frac{dv}{dr}$$

$$r(P_1 - P_2) = -\mu 2L \frac{dv}{dr}$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{r(P_1 - P_2)}{2\mu L} \cdots ④$$

④ 식의 양변을 반지름에 따라 부정적분하면

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{r(P_1 - P_2)}{2\mu L}$$

$$\int \frac{dv}{dr} dr = \int -\frac{r(P_1 - P_2)}{2\mu L} dr$$

$$v = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\mu L} \int r dr$$

$$= -\frac{(P_1 - P_2)}{2\mu L} [\frac{1}{2} r^2]$$

$$= -\frac{(P_1 - P_2)}{4\mu L} r^2 + c \cdots ⑥$$

혈관의 벽은 혈액이 안 흐르는 것을 가정($v(R) = 0 \cdots$ ⑤) boundary condition ⑤를 적용하면

$$0 = -\frac{(P_1 - P_2)}{4\mu L} R^2 + C$$

$$C = \frac{(P_1 - P_2)}{4\mu L} R^2 \cdots ⑦$$

⑥ ⑦에 의해

$$\upsilon = \frac{(P_1 - P_2)}{4\mu L}(R^2 - r^2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑧}$$

우리가 구하려는 또 하나의 목표인 혈류(flow)는 단위 시간당 흐르는 양 또는 '속도 X 면적'으로 구할 수 있음.

$$Q = \int_0^R \upsilon(r) 2\pi r dr$$

↓ ⑧식을 대입

$$= \int_o^R \frac{(P_1 - P_2)}{4\mu L}(R^2 - r^2)\, 2\pi r\, dr$$

$$= \int_o^R \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\mu L}(R^2 r - r^3) dr$$

$$= \left[\frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\mu L}\left(\frac{R^2}{2} r^2 - \frac{r^4}{4}\right) \right] R \\ O$$

$$= \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\mu L}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi(P_1 - P_2)}{8\mu L} R^4$$

$$= \pi R^4 \frac{(P_1 - P_2)}{8\mu L} \cdots \text{⑨}$$

⑧과 ⑨식에 의해 교과서에서 흔히 볼 수 있는 유체의 속도와 유량을 구하는 공식을 구하였음.

여기까지 구한 방정식의 가정 중 주된 것은

(1) 유한한 크기의 관을 가정(cylinder of infinite size)
(2) 단위 유체내에서는 고체를 가정하였고, 표면에서만 마찰력 존재
(3) 관이 늘어날 수 있는 탄성체가 아니고, 고정된 고체

이제 상기 가정 중 (2)의 단위 유체내에서 고체가 아닌 액체가 존재하여 표면뿐만 아니라 내부에서도 마찰력이 존재한다고 할 때 유체의 속도 방정식을 구해보자.

원통 안에 흐르는 두께 δr인 유체에 작용하는 힘을 ②, ③과 같은 방식으로 구하면

$$F_P = (P_1 - P_2) 2\pi r \delta r \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑩}$$

두께 δr인 유체에 작용하는 마찰력 (δF_{visc})에서 높이를 구하는 방법 중 하나가 단위 두께를 가로(δr)로 두고 기울기[$\frac{\partial}{\partial r}(F_{visc})$]를 곱하는 방법을 사용할 수 있음(Fig. 5).

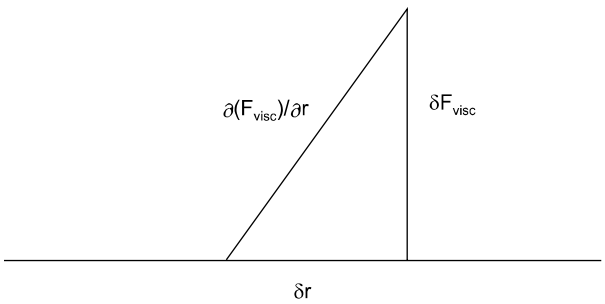

Fig. 5. One of methods to get height. If we know the unit length in width and the slope, we can get the height. In this case, we know the unit radius (δ_r) and the slope ($\partial(F_{visc})/\partial_r$), then we can get the height (δF_{visc}) by multiplication.

단위마찰력 $F = \delta F_{visc} = \frac{\partial}{\partial r} F_{visc} \cdot \delta r$

$$= \frac{\partial}{\partial r}(\mu 2\pi r L \frac{dv}{dr})\delta r \quad (\text{③식을 대입한 결과임})$$

$$= 2\pi\mu L \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \frac{dv}{dr})\delta r$$

$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$를 적용하면

$$= 2\pi\mu L\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} r\right)\delta r \cdots \text{⑪}$$

⑩, ⑪은 크기는 같고 방향은 다르므로 즉,

F_P = −단위마찰력F

$$(P_1 - P_2) 2\pi r \delta r = -2\pi\mu L\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} r\right)\delta r$$

$$\frac{(P_1 - P_2)}{\mu L} r = -\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \cdot r\right)$$

$$r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{(P_1 - P_2)}{\mu L} r = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{P_1 - P_2}{\mu L} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑫}$$

⑫가 continous laminar flow에서 단위 유체 내부에 마찰이 있는 액체를 가정하였을 때 유체속도 v의 상태 방정식임.

부록 2. Pulsatile laminar flow에서 유체속도 v 상태방정식과 혈류량 공식 유도[7]

공식을 유도하기 전에 독자의 이해를 돕기 위한 편미분 공식을 소개하면 다음과 같다.

$$\frac{d(f(x,y))}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \cdots \text{①}$$

속도 v(t,z)가 원래 형태임. 시간과 위치에 따라 달라지나 길이 z를 매우 짧게 하면, 편미분 $\frac{\partial v(t,z)}{\partial z}=0$이 되므로 $\frac{dv(t,z)}{dt}=\frac{\partial v(t,z)}{\partial t}$ (상기 ①식에서 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 항이 0이 됨.)

또한, 어떤 물체의 질량을 구하는 여러 방법 중에

부피(m^3) × 밀도(gm/m^3) = 질량(gm) ····· ②

으로 구하는 방법도 있음.

그럼 이제 부록 1처럼 Newton의 제 2법칙에 기초하여 pulsatile laminar flow에서 속도 방정식을 구해보자. continuous laminar flow에서는 유체에 가해지는 힘의 합이 0이 되어 steady state를 가정하였다. 즉, $F=F_P+F_V=0$. 하지만 pulsatile laminar flow에선 관 양쪽에 작용하는 힘이 계속 달라짐으로 인해 유체에 힘이 작용하고, 유체는 질량이 있으므로 가속도가 발생하며 속도가 변하게 된다. 이를 하나씩 구해보자.

먼저 유체에 작용하는 힘의 합이 0이 아니므로

$$F=F_P+F_V\neq 0 \quad \cdots\cdots \ ③$$

먼저 앞의 총합인 힘 F를 구하고, 다음에 F_p와 F_v를 각각 구해서 비교하는 방법을 사용하겠다.

$$F=ma=m\frac{dv}{dt}$$
$$=(2\pi r\delta r\delta L)\rho\frac{\partial v}{\partial t} \quad (①② \text{ 이용, } (2\pi r\delta r\delta L)\text{:부피, } \rho\text{:밀도})$$
$$=2\pi r\delta r\delta L\rho\frac{\partial v}{\partial t} \quad \cdots\cdots \ ④$$

③식의 두번째 항인 F_p 구하는 과정을 알아보자. 공식 유도 중 수식의 이해를 돕기 위해 먼저 설명하면

$\frac{P_1-P_2}{\delta L}=-\frac{\partial P}{\partial z}$: Fig. 2에서 z축 상에서 왼쪽에 있는 작은 값에서 오른쪽에 있는 큰 값을 빼게 되므로 음수가 나오게 되어 좌변과 부호를 맞추기 위해서 '−' 붙음

$$F_p=(P_1-P_2)2\pi r\delta r$$
↓ 분자 분모에 δL 곱함.
$$=\frac{P_1-P_2}{\delta L}2\pi r\delta r\delta L$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial z}2\pi r\delta r\delta L \quad \cdots\cdots \ ⑤$$

③식의 세번째 항인 Fv 구하는 과정을 알아보자.

$$F_V=2\pi\mu(r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\partial v}{\partial r})\delta L\delta r \quad \cdots\cdots \ ⑥ \text{ (부록 1의 식 ⑪로부터)}$$

이제 관련된 3가지 힘을 모두 구했고 이를 한 개의 방정식으로 정리하면

$$F=F_P+F_V=F=ma$$
↓ ④⑤⑥대입하여
$$F=-\frac{\partial P}{\partial z}2\pi r\delta r\delta L+2\pi\mu(r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\partial v}{\partial r})\delta L\delta r=2\pi r\delta r\delta L\rho\frac{\partial v}{\partial t}$$
↓ $2\pi\delta L\delta r$로 나눔
$$-r\frac{\partial P}{\partial z}+\mu r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\mu\frac{\partial v}{\partial r}=r\rho\frac{\partial v}{\partial t}$$
↓ μr로 양변나눔
$$-\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial v}{\partial t}$$
↓ 위치 바꿈.
$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial v}{\partial t}$$
↓ $\frac{\rho}{\mu}=\frac{1}{\lambda}$로 바꿈. ($\lambda$: kinetic viscosity)
$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial v}{\partial t} \quad \cdots\cdots \ ⑧$$

cf) continuous laminar flow의 속도 상태방정식 부록 1 식 ⑫와 비교하면 우변만 달라진 것을 알 수 있다.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{(P_1-P_2)}{\mu L}=0$$

⑧식에서 $\frac{\partial P}{\partial z}$와 $\frac{\partial v}{\partial t}$를 $\frac{\partial v}{\partial r}$와 같은 차원으로 바꿔야 미분방정식을 풀 수 있다. 그러므로, $\frac{\partial P}{\partial z}$과 v를 다른 방식으로 표현하는 것에 대해 알아보자.

먼저, $-\frac{\partial P}{\partial z}$를 다음과 같이 정의하고 (≡: 정의라는 뜻) 자세한 설명은 말미에 보충 설명을 참조하자.

$$-\frac{\partial P}{\partial z}\equiv A^*e^{iwt} \quad \cdots\cdots \ ⑨$$

그리고, v에 대해서는 파장과 위상 정보를 가진 새로운

속도 변수 u에 대해 다음과 같이 정의하자.

$$v \equiv ue^{iwt} \quad \cdots\cdots ⑩$$

⑧식에 ⑨, ⑩ 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{d^2u}{dr^2}e^{iwt}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}e^{iwt}+\frac{1}{\mu}A^*e^{iwt}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial(ue^{iwt})}{\partial t}$$

↓ 마지막 항 미분 수행 후 e^{iwt}로 나눔.

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{iw}{\lambda}u=-\frac{A^*}{\mu} \quad \cdots\cdots ⑪$$

혈관 벽에서는 속도가 0인 것을 가정[$u(R)=0$]하고 풀면 고등수학에서 나오는 Bessel function으로 풀 수 있다. Bessel 함수에 대한 자세한 설명은 참고문헌을 참조하기 바란다.[22)]

$$u=\frac{A^*}{iw\rho}\left\{1-\frac{J_\circ[r\sqrt{(w/\lambda)}\,i^{\frac{3}{2}}]}{J_\circ[R\sqrt{(w/\lambda)}\,i^{\frac{3}{2}}]}\right\} \cdots\cdots ⑫$$

(J_0()은 Bessel 함수)

⑫식을 ⑩에 대입하여 아래 식을 얻는다.

$$v=\frac{A^*}{iw\rho}\left\{1-\frac{J_\circ[r\sqrt{(w/\lambda)}\,i^{\frac{3}{2}}]}{J_\circ[R\sqrt{(w/\lambda)}\,i^{\frac{3}{2}}]}\right\}e^{iwt} \cdots\cdots ⑬$$

이 때 변수들을 다음과 같이 정의한 후 정리하면,

$$\alpha \equiv R(\frac{w}{\lambda})^{\frac{1}{2}}$$

$$y \equiv \frac{r}{R}$$

$$\rho \equiv \frac{\mu}{\lambda}$$

(ρ: density of liquid, μ: Neutonian coefficient of viscosity, λ: kinetic viscosity)

$$v=\frac{A^*}{iw\rho}\left\{1-\frac{J_\circ(\alpha y i^{\frac{3}{2}})}{J_\circ(\alpha i^{\frac{3}{2}})}\right\}e^{iwt}$$

$\frac{1}{w\rho}$을 다음과 같이 변환한 후 대입한다.

$$\frac{1}{w\rho}=\frac{1}{w\frac{\mu}{\lambda}}=\frac{R^2}{\mu\frac{w}{\lambda}R^2}=\frac{R^2}{\mu R^2(\frac{w}{\lambda})^{\frac{1}{2}\cdot 2}}=\frac{R^2}{\mu(R(\frac{w}{\lambda})^{\frac{1}{2}})^2}=\frac{R^2}{\mu\alpha^2}$$

$$v=\frac{A^*R^2}{i\mu\alpha^2}\left\{1-\frac{J_\circ(\alpha y i^{\frac{3}{2}})}{J_\circ(\alpha i^{\frac{3}{2}})}\right\}e^{iwt} \cdots\cdots ⑭$$

상기 식을 혈관의 구경에 대해 적분을 시행하면 다음과 같은 혈류식을 얻는다.

$$Q=\frac{\pi A^*R^2}{i\omega\rho}\left(1-\frac{2J_1(\alpha i^{\frac{3}{2}})}{\alpha i^{\frac{3}{2}}J_\circ(\alpha i^{\frac{3}{2}})}\right)e^{iwt}$$

이상으로 본문에 기재된 pulsatile laminar flow에서 속도와 유량에 대한 공식 유도를 마치고, 유도 과정 중에 사용된 공식에 대해 보충 설명하면 다음과 같다.

$*-\frac{\partial P}{\partial z}=A^*e^{iwt}$, $v=ue^{iwt}$ 삽입과정을 보충 설명하기 위해, Fourier transform을 다음과 같이 정의하였을 때

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega$$

$$\frac{df}{dt}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(\omega)\,(i\omega)\,e^{iwt}d\omega$$

압력 파형은 다음과 같이 변화됨.

$$P(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int P(w)e^{iwt}dw$$

$$-\frac{\partial P(t)}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int[-\frac{\partial P(w)}{\partial z}]e^{iwt}dw$$

이 때, 특정주파수 성분만 고려한다는 의미에서 A*(w)를 $-\frac{\partial P}{\partial z}$의 Fourier transform 중 특정한 각진동수 w의 진폭으로 정의하면, 해당 주파수 이외의 다른 각진동수에서는 모두 0으로 계산되므로

$$-\frac{\partial P(t)}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int A^*e^{iwt}d\omega \cdots\cdots ⑮$$

$$v(r,z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int u(r,z,\omega)e^{iwt}d\omega \cdots\cdots ⑯$$

위의 ⑮, ⑯ 두 식을 다음 식(⑧번)에 대입하면

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial v}{\partial t}$$ (v,P 모두 (r,z;t)의 함수)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}e^{iwt}d\omega+\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\frac{\partial u}{\partial r}e^{iwt}d\omega+$$
$$\frac{1}{\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int A^* e^{iwt}d\omega=\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int iwue^{iwt}dw$$

$*\int fe^{iwt}dw=\int ge^{iwt}dw$라는 방정식이 있을 때

$\Rightarrow\int(f-g)e^{iwt}dw=0$의 가장 간단한 해가 $f=g$임

$\downarrow\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{iwt}dw$가 공통이므로

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\mu}A^*=\frac{1}{\lambda}iwu$$

시간에 따라 유체의 체적소가 이동하므로 시간에 대한 전미분은 편미분과 같을 수 없음. 하지만 푸리에 변환을 하고나면 시간에 대한 고려를 하지 않고, 압력의 z축으로의 미분도 일정하다고 보았으므로 고려해야 할 변수는 지름방향 (r) 뿐이므로 전미분으로 바꾸어 적어도 됨. 즉 다음 식은 특정주파수 성분만을 고려했을 때 지름방향 변수에 따른 속도의 변화를 구하는 것임.

$$\frac{d^2 u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{iw}{\lambda}u=-\frac{A^*}{\mu}$$